Муниципальное общеобразовательное учреждение
Средняя общеобразовательная школа № 32
города Ставрополя

«Метод рационализации при решении логарифмических неравенств»

(11 класс)

Автор:
Токова Т.В.
учитель математики
МБОУ СОШ № 32
высшая квалификационная
категория

Метод рационализации при решении логарифмических неравенств.

Как известно, при решении неравенств используем следующие методы решения:

1)сведение неравенств к равносильной системе или совокупности систем;

2)расщепление неравенств;

3)метод перебора;

4)метод интервалов;

5)введение новой переменной;

6)метод рационализации;

7)использование свойств функции: область определения, ограниченность, монотонность.

Метод рационализации мы используем реже по сравнению с другими методами. Я изложу его суть и остановлюсь на применении выше указанного метода при решении заданий ЕГЭ профильный уровень. Следует заметить, что практически каждый из примеров решён двумя способами, чтобы сравнить преимущества того или иного и выбрать более рациональный.

Суть метода.

Метод рационализации (декомпозиции, метод замены множителей, правило знаков) заключается в замене сложного выражения F(x) на более простое выражение G(x) (в конечном итоге рациональное), при которой неравенство $G(x)\vee 0$ равносильно неравенству $F(x)\vee 0$ в области определения выражения F(x).

Выделим некоторые выражения F и соответствующие им рационализирующие выражения G, где f, g, h, p, q – выражения с переменной x.

$(h>0, h\neq 1, f>0, g>0, a>0; a\neq 1.)$

	F	G
1	$\log_a f-\log_a g$	$(a-1)(f-g)$
1а	$\log_a f-1$	$(a-1)(f-a)$
1б	$\log_a f$	$(a-1)(f-1)$
2	$\log_h f-\log_h (g)$	$(h-1)(f-g)$
2а	$\log_h f-1$	$(h-1)(f-h)$
2б	$\log_h f$	$(h-1)(f-1)$
3	$\log_f h-\log_g h$ $(g\neq 1),(f\neq 1)$	$(h-1)(g-1)(h-1)(g-f)$
4	$h^f-h^g(h>0)$	$(h-1)(f-g)$
4а	h^f-1	$(h-1)f$
5	$f^h-g^h\ (f>0; g>0)$	$(f-g)h$
6	$\lvert f\rvert-\lvert g\rvert$	$(f-g)(f+g)$

Некоторые следствия (с учётом области определения неравенства)

1) $\log_h f . \log_p g \quad \vee 0 \Leftrightarrow (h - 1)(f - 1)(p - 1)(g - 1) \vee 0$;

2) $\log_h f + \log_h g \vee 0 \Leftrightarrow (fg - 1)(h - 1) \vee 0$;

3) $\sqrt{f} - \sqrt{g} \vee 0 \Leftrightarrow f - g \vee 0$;

4) $\dfrac{h^f - h^g}{h^p - h^g} \vee 0 \Leftrightarrow \dfrac{f-g}{p-g} \vee 0.$

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЙ логарифмических неравенств методом рационализации.

Теорема: Для любого действительного a>0, a≠1 неравенство

$$\log_a f(x) \vee \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ (a-1)(f(x) - g(x)) \vee 0 \end{cases}.$$

Следствие: Разность логарифмов по одному и тому же основанию $\log_a f(x) - \log_a g(x)$ всегда имеет тот же знак, что и произведение $(a-1)(f(x) - g(x))$ при всех допустимых значениях переменных.

Начнём с простых примеров.

1. Решите неравенство $\log_{\frac{1}{2}}(5x-1) \geq -2$.

Решение.1. Применим метод равносильного перехода:

$$\log_{\frac{1}{2}}(5x-1) \geq -2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 5x-1 > 0, \\ 5x-1 \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{5}, \\ x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{5}; 1\right].$$

2. Проведём рационализацию по п.1 таблицы, представив 2 в виде логарифма с основанием $\dfrac{1}{2}$:

$$\log_{\frac{1}{2}}(5x-1) \geq \log_{\frac{1}{2}} 4 \Leftrightarrow \begin{cases} 5x-1 > 0, \\ \left(\frac{1}{2} - 1\right)(5x - 1 - 4) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} x > \frac{1}{5}, \\ x \leq 1. \end{cases}$$

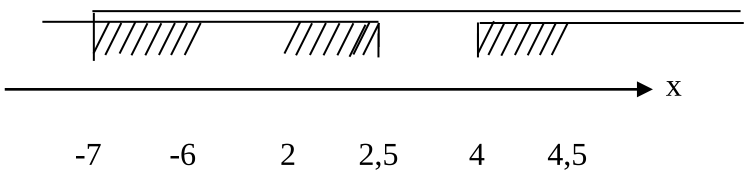
Ответ: $\dfrac{1}{5} < x \leq 1$.

2. Решить неравенство $\dfrac{\log_2\left(2x^2-13x+20\right)-1}{\log_3\left(x+7\right)}\le 0$.

Решение. Рационализируем числитель и знаменатель дроби согласно п.1и 1б

$$\frac{\log_2\left(2x^2-13x+20\right)-\log_2 2}{\log_3\left(x+7\right)}\le 0$$

$$\begin{cases} 2x^2-13x+20>0, \\ x+7>0, \\ \dfrac{(2-1)\left(2x^2-13x+20-2\right)}{(3-1)(x+7-1)}\le 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 2(x-4)\left(x-\dfrac{5}{2}\right)>0, \\ x>-7, \\ \dfrac{(x-2)\left(x-\dfrac{9}{2}\right)}{2(x+6)}\le 0. \end{cases}$$



Ответ: -7 < x < 6, 2 ≤ x < 2,5, 4 < x ≤ 4,5.

Решите неравенство $\log_{0,1}\left(x^2+x-2\right)>\log_{0,1}\left(x+3\right)$.

Решение.

Приведём для сравнения два способа решения.

1. Данное неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases} x^2+x-2>0, \\ x+3>0, \\ x^2+x-2<x+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x<-2, \\ x>1, \end{array}\right. \\ x>-3, \\ \left[\begin{array}{l} x>-\sqrt{5}, \\ x<\sqrt{5} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x\in\left(-\sqrt{5};-2\right)\cup\left(1;\sqrt{5}\right).$$

1) $x^2+x-2>0.$ $(x+2)(x-1)\succ 0$, $x\in(-\infty;-2)\cup(1;\infty)$.

2) $x^2+x-2<x+3;$ $x^2<5;$ $x\in\left(-\sqrt{5};\sqrt{5}\right).$

Найдя общие решения неравенств 1) , 2) и учитывая, что $x\succ -3$, окончательно получим

$x\in\left(-\sqrt{5};-2\right)\cup\left(1;\sqrt{5}\right).$ Ответ: $\left(-\sqrt{5};-2\right)\cup\left(1;\sqrt{5}\right).$

2. Метод рационализации. (Использован п.1б)

$$\lg_{0,1}\frac{x^2+x-2}{x+3}>0 \Leftrightarrow \begin{cases}(0{,}1-1)\left(\dfrac{(x^2+x-2)}{x+3}-1\right)>0,\\ x^2+x-2>0,\\ x+3>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{x^2+x-2-x-3}{x+3},\\ x<-2,\\ x>1,\\ x>-3\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{x^2-5}{x+3}<0,\\ x<-2,\\ x>1.\end{cases} \Leftrightarrow \quad x\in\left(-\sqrt{5};-2\right)\cup\left(1;\sqrt{5}\right).$$

Ответ: $\left(-\sqrt{5};-2\right)\cup\left(1;\sqrt{5}\right).$

Решите неравенство $\dfrac{\log_2(3x+2)}{\log_2(2x+3)}\le 0.$

Решение. Данное неравенство равносильно совокупности двух систем (метод расщепления неравенств):

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\log_2(3x+2)\le 0,\\ \log_2(2x+3)>0,\end{cases}\\ \begin{cases}\log_2(3x+2)\ge 0,\\ \log_2(2x+3)<0.\end{cases}\end{array}\right.$$

Решим каждую систему совокупности.

1) $\begin{cases}\log_2(3x+2)\le 0,\\ \log_2(2x+3)>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\begin{cases}3x+2>0,\\ 3x+2\le 1,\end{cases}\\ \begin{cases}2x+3>0,\\ 2x+3>1\end{cases}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\begin{cases}x>-\dfrac{2}{3};\\ x\le-\dfrac{1}{3};\end{cases}\\ x>-1\end{cases} \Leftrightarrow -\dfrac{2}{3}<x\le-\dfrac{1}{3}.$

2) $\begin{cases}\log_2(3x+2)\ge 0,\\ \log_2(2x+3)<0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\begin{cases}3x+2>0,\\ 3x+2\ge 1,\end{cases}\\ \begin{cases}2x+3>0,\\ 2x+3<1\end{cases}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\ge-\dfrac{1}{3},\\ \begin{cases}x>-1{,}5,\\ x<-1\end{cases}\end{cases} \Leftrightarrow \varnothing$

Ответ: $-\dfrac{2}{3}<x\le-\dfrac{1}{3}.$

Метод рационализации. $\dfrac{\log_2(3x+2)}{\log_2(2x+3)}\le 0.$

$$\begin{cases}\dfrac{(2-1)(3x+1)}{(2-1)(2x+2)} \succ 0,\\ 3x+2>0,\\ 2x+3>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-1,\\ x\le -\dfrac{1}{3},\\ x>-\dfrac{2}{3},\\ x>-1{,}5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-\dfrac{2}{3},\\ x\le -\dfrac{1}{3}.\end{cases}$$

Ответ: $-\frac{2}{3}<x\le-\frac{1}{3}$.

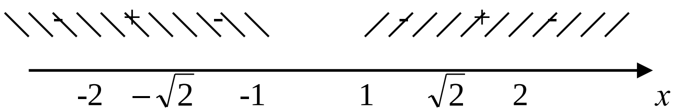
Решите неравенство $\dfrac{x^2-4}{\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2-1\right)}<0$;

1.Решение. (**Метод интервалов)**1. Введем функцию $f(x)=\dfrac{x^2-4}{\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2-1\right)}$.

$$D(f):\begin{cases}x^2-1>0,\\ \log_{\frac{1}{2}}\left(x^2-1\right)\ne 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x<-1,\\ x>1,\end{array}\right.\\ x^2-1\ne 1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x<-1,\\ x>1,\end{array}\right.\\ x\ne \pm\sqrt{2}.\end{cases}$$

2. Найдем нули функции в D(f): x^2-4=0; x=±2.

3. Область определения функции разобьем нулями на промежутки, в каждом из которых непрерывная функция сохраняет свой знак.

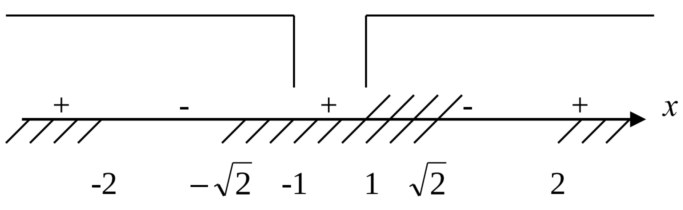


$f(-3)<0$; $f(-3)<0$;

$f(-2{,}5)>0$; $f(-1{,}2)<0$; $f(1{,}5)>0$; Ответ: $(-\infty;-2)\cup\left(-\sqrt{2};-1\right)\cup\left(1;\sqrt{2}\right)\cup(2;+\infty)$.

2.Метод рационализации. $\dfrac{x^2-4}{\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2-1\right)}<0$; $\begin{cases}\left(x^2-4\right)\left(\dfrac{1}{2}-1\right)\left(x^2-2\right)<0,\\ x^2-1>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left(x^2-4\right)\left(x^2-2\right)<0,\\ x^2-1>0\end{cases}$

$x\in(-\infty;-2)\cup\left(-\sqrt{2};-1\right)\cup\left(1;\sqrt{2}\right)\cup(2;+\infty)$.



Ответ: $(-\infty;-2)\cup\left(-\sqrt{2};-1\right)\cup\left(1;\sqrt{2}\right)\cup(2;+\infty)$.

Решите неравенство. $\dfrac{\lg\left(5y^2-2y+1\right)}{\lg\left(4y^2-5y+1\right)^3}\le\dfrac{\log_{5^3}7}{\log_5 7}$.

Решение. Воспользуемся свойствами логарифмов и разделим обе части неравенства на 3:

1) $\dfrac{\lg\left(5y^2-2y+1\right)}{3\lg\left(4y^2-5y+1\right)}\le\dfrac{1}{3}$;

2) $\dfrac{\lg\left(5y^2-2y+1\right)}{\lg\left(4y^2-5y+1\right)}\le 1$;

3) $\lg_{4y^2-5y+1}\left(5y^2-2y+1\right)\le 1$ (по формуле перехода от одного основания логарифма к другому в обратном порядке).

4) $\lg_{4y^2-5y+1}\left(5y^2-2y+1\right)-\log_{4y^2-5y+1}\left(4y^2-5y+1\right)\le 0$

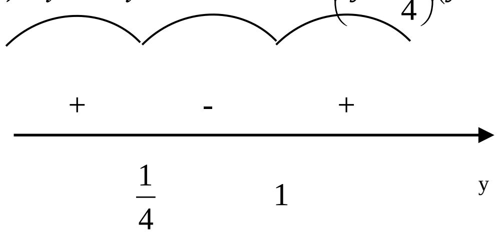
$$\lg_{4y^2-5y+1}\frac{5y^2-2y+1}{4y^2-5y+1}\le 0.$$

Метод рационализации: (п.2б)

5) $\begin{cases} 4y^2-5y+1>0, \\ 4y^2-5y+1\ne 1, \\ 5y^2-2y+1>0, \\ \left(4y^2-5y+1-1\right)\left(\dfrac{5y^2-2y+1}{4y^2-5y+1}-1\right)\le 0; \end{cases}$

Решим каждое из неравенств системы 5):

1) $4y^2-5y+1>0 \Leftrightarrow \quad 4\left(y-\dfrac{1}{4}\right)\left(y-1\right)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y<\dfrac{1}{4}, \\ y>1. \end{array}\right.$



2) $4y^2-5y+1\ne 1$; $\quad y\left(4y-5\right)\ne 0 \Rightarrow y\ne 0,\ y\ne\dfrac{5}{4}.$

3) $5y^2-2y+1>0$; D=1-5<0. $y\in R$.

4) $\left(4y^2-5y\right)\dfrac{\left(5y^2-2y+1-4y^2+5y-1\right)}{4y^2-5y+1}\le 0.$ Отсюда

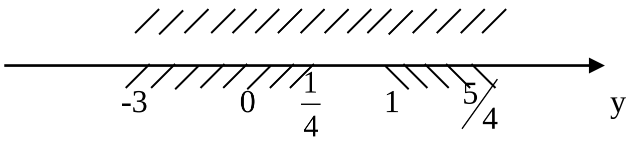
$$\left(4y^2-5y\right)\frac{\left(y^2+3y\right)}{4y^2-5y+1}\le 0.$$

Разложим на множители числитель и знаменатель дроби:

$$\frac{y(4y-5)y(y+3)}{4\left(y-\frac{1}{4}\right)(y-1)}\le 0.$$ Так как $\frac{y^2}{4\left(y-\frac{1}{4}\right)(y-1)}\ge 0$, то $(4y-5)(y+3)\le 0$ .3

Значит, система неравенств5) равносильна смешанной системе

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l} y>1; \\ y<\frac{1}{4}; \end{array}\right. \\ y\ne\frac{5}{4}; \\ y\ne 0. \\ \begin{cases} y\ge -3, \\ y\le\frac{5}{4}. \end{cases}\end{cases}$$



Ответ: $[-3{,}0)\cup\left(0;\frac{1}{4}\right)\cup\left(1;\frac{5}{4}\right).$

Решите неравенство

$$\frac{9}{\left(\log_{2,1}(x-10)^2\right)\log_{1,9}x}\ge\frac{(x-1)^{\log_3(x-1)}}{9\left(\log_{2,1}(x-10)^2\right)\log_{1,9}x.}.$$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x-1>0, \\ x>0, \\ x-10\ne 0, \\ (x-10)^2\ne 1; \end{cases}\begin{cases} x>1, \\ x>0, \\ x\ne 10, \\ x\ne 11, \\ x\ne 9 \end{cases}\begin{cases} x>1, \\ x\ne 10, \\ x\ne 11, \\ x\ne 9. \end{cases}$ При $x>1$ $\log_{1,9}x>0.$ Делим обе части неравенства

на $\log_{1,9}x$. Имеем: $\frac{9}{\log_{2,1}(x-10)^2}\ge\frac{(x-1)^{\log_3(x-1)}}{9\log_{2,1}(x-10)^2};$

$$\frac{9^{(9}}{\log_{2,1}(x-10)^2}-\frac{(x-1)^{\log_3(x-1)}}{9\log_{2,1}(x-10)^2}\ge 0;$$

$$\frac{81-(x-1)^{\log_3(x-1)}}{9\log_{2,1}(x-10)^2} \ge 0;$$

Представим числитель в виде разности логарифмов с основанием 3 и рационализируем знаменатель по п. 1б.:

$$\frac{\log_3 3^4 - \log_3 (x-1)^{\log_3(x-1)}}{(2,1-1)\left((x-10)^2-1\right)} \ge 0;$$

$$\frac{4-\log_3(x-1)\log_3(x-1)}{(x-10)^2-1} \ge 0;$$

$$\frac{4-\log_3^2(x-1)}{x^2-20x+99} \ge 0;$$

Разложив на множители числитель и знаменатель дроби, получим

$$\frac{(2-\log_3(x-1))(2+\log_3(x-1))}{(x-9)(x-11)} \ge 0.$$

Применяем метод рационализации к числителю дроби. Так как
$\log_3 9 + \log_3(x-1) = \log_3 9 - \log_3(x-1)^{-1}$, то

$$\frac{(3-1)(9-x+1)(3-1)\left(9-(x-1)^{-1}\right)}{(x-9)(x-11)} \ge 0;$$

$$\frac{4(10-x)\left(9-\dfrac{1}{x-1}\right)}{(x-9)(x-11)} \ge 0;$$

$$\frac{(10-x)\left(\dfrac{9x-10}{x-1}\right)}{(x-9)(x-11)} \ge 0;$$

$$\frac{(10-x)\left(\dfrac{9x-10}{x-1}\right)}{(x-9)(x-11)} \ge 0;$$

$\dfrac{(10-x)(9x-10)}{(x-9)(x-11)(x-1)} \le 0.$ Применяя метод интервалов к последнему неравенству и учитывая ОДЗ, получим: $x \in \left[\dfrac{10}{9};9\right) \cup (10;11).$ Ответ: $\left[\dfrac{10}{9};9\right) \cup (10;11).$

Решите систему неравенств $\begin{cases} 25^x - 30\cdot 5^x + 125 \ge 0, \\ \log_x(x-1)\cdot\log_x(x+1) \le 0. \end{cases}$

Решение.

1. $25^x - 30 \cdot 5^x + 125 \geq 0$. Пусть $5^x = t (t \succ 0)$. Тогда неравенство принимает вид t^2-30t+125≥ 0
Последнее равносильно неравенству (t-5)(t-25) ≥ 0. Применяя метод интервалов, получим

$$\left[\begin{array}{l} 0 \prec t \leq 5, \\ t \geq 25 \end{array}\right. \text{откуда} \left[\begin{array}{l} 0 \prec 5^x \leq 5, \\ 5^x \geq 25; \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x \leq 1, \\ x \geq 2. \end{array}\right.$$

2. $\log_x (x-1) \cdot \log_x (x+1) \leq 0.$

Запишем в систему все ограничения для переменной x и рационализируем неравенство, используя следствие 1 (см. таблицу)

$$\begin{cases} x \succ 0, \\ x \neq 1, \\ x \succ 1, \\ x \succ -1, \\ (x-1)(x-2)(x-1)x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \succ 1, \\ x(x-1)^2(x-2) \leq 0. \end{cases}. \Leftrightarrow \quad x \in (1;2.]$$

3. Общим решением совокупности $\left[\begin{array}{l} x \leq 1, \\ x \geq 2 \end{array}\right.$ и системы $\begin{cases} x \succ 1, \\ x \leq 2 \end{cases}$ есть число 2. Ответ: 2.

Источники информации.

1. Корянов А.Г., ПрокофьевА.А. Математика. ЕГЭ Методы решения неравенств с одной переменной.
2. Задания ЕГЭ (Открытый банк ЕГЭ) https://math-ege.sdamgia.ru.